



TITLE:

# 数值的小平次元

AUTHOR(S):

中山, 昇

---

CITATION:

中山, 昇. 数值的小平次元. 代数幾何学シンポジウム記録 1997, 1997: 87-95

ISSUE DATE:

1997

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/214673>

RIGHT:

## 数値的小平次元

中山 昇

京都大学数理解析研究所

E-mail: nakayama@kurims.kyoto-u.ac.jp

### 1. $D$ 次元と数値的 $D$ 次元

この話では代数多様体はすべて複素数体  $\mathbb{C}$  上定義されているものとする。非特異な射影的代数多様体  $X$  の因子 (divisor)  $D$  に対する  $D$  次元  $\kappa(D) = \kappa(D, X)$  が飯高によって導入され  $X$  の小平次元が  $\kappa(X) := \kappa(K_X, X)$  と標準因子  $K_X$  によって定義された。定義の仕方により  $D$  が  $\mathbb{Q}$  因子や  $\mathbb{R}$  因子でも  $D$  次元が定義できる。特異点のある多様体でもその上の因子  $D$  が  $\mathbb{Q}$ -Cartier または  $\mathbb{R}$ -Cartier ならば、適当な特異点解消によって引き戻しを考えることによってその  $D$  次元が定義できる。しかし  $D_1$  と  $D_2$  が数値的同値、つまり第一 Chern 類  $c_1(D_1), c_1(D_2)$  が  $H^2(X, \mathbb{R})$  の中で等しいとき、でも二つの  $\kappa$  は異なることがある。

一方  $D$  が nef のとき、すなわち任意の既約曲線  $C$  との交点数  $D \cdot C \geq 0$  になるとき、には数値的  $D$  次元  $\nu(D) := \nu(D, X)$  が定義される。これは  $D^k$  が  $H^{2k}(X, \mathbb{R})$  の中でゼロでないという性質を持つ非負整数  $k$  の最大値である。また因子は前と同様  $\mathbb{R}$  因子でもよいし、特異点のある多様体上の  $\mathbb{R}$ -Cartier 因子でもよい。この量は  $D$  の第一 Chern 類のみに依存する。因子  $D$  が nef のとき  $\kappa(D) = \dim X$  と  $\nu(D) = \dim X$  は同値条件である。一般に  $\kappa(D) = \dim X$  のとき  $D$  を big と言う。また  $\kappa(D) = \nu(D)$  となる nef な因子  $D$  を abundant と言うがこのとき  $D$  は適当な双有理射で引き戻すと  $\kappa(D)$  次元の代数多様体の big な因子の引き戻しと  $\mathbb{Q}$  線型同値になる [Ka2]。射影的代数多様体  $X$  が terminal 特異点しかもたず、標準因子  $K_X$  が nef の時、それを極小モデルと言う。極小モデルの標準因子  $K_X$  は semi-ample である、というのが abundance 予想である。川又 [Ka2] はこの  $K_X$  が abundant ならば semi-ample であることを示した。

今回の話はこの数値的  $D$  次元を nef 因子だけでなく全ての  $\mathbb{R}$  因子（特異点のあるときは  $\mathbb{R}$ -Cartier 因子）に対して定義をしてその性質を調べることである。詳しい結果は [N] を参照されたい。

## 2. 擬正因子 (PSEUDO-EFFECTIVE DIVISOR)

非特異射影的代数多様体  $X$  上の  $\mathbb{R}$  因子の第一 Chern 類全体は  $H^2(X, \mathbb{R})$  の部分ベクトル空間  $N^1(X)$  をなす. これは Néron-Severi 群  $NS(X)$  に対する  $NS(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  と同型である. この中で正  $\mathbb{R}$  因子 (effective  $\mathbb{R}$ -divisor), すなわち既約分解したときの各係数が非負となる  $\mathbb{R}$  因子, の第一 Chern 類全体は凸錐体をなす. この錐体の閉包を  $PE(X)$ , その内部  $\text{Int } PE(X)$  を  $\text{Big}(X)$  と書く. 第一 Chern 類  $c_1(D)$  が  $PE(X)$  に含まれるとき,  $\mathbb{R}$  因子  $D$  を 擬正 (pseudo-effective) と呼び,  $\text{Big}(X)$  に含まれるとき, big と呼ぶ.  $\mathbb{R}$  因子  $D$  が big であることと  $\dim H^0(X, \lfloor mD \rfloor)$  が  $m$  の関数として  $m^{\dim X}$  の order であることは同値である. ただしここで  $\lfloor D \rfloor$  は  $D$  の切り下げを表わす. また ample 因子の第一 Chern 類の正の実数による線型結合全体は凸錐体  $\text{Amp}(X)$  を生成するが, この閉包を  $\text{Nef}(X)$  と書く. その内部  $\text{Int } \text{Nef}(X)$  は  $\text{Amp}(X)$  である.  $c_1(D) \in \text{Nef}(X)$  となる  $\mathbb{R}$  因子  $D$  を nef と呼び,  $c_1(D) \in \text{Amp}(X)$  のとき ample と呼ぶ. これは  $D$  が  $\mathbb{Q}$  因子のときの通常の nef および ample の定義と一致する. 数値的  $D$  次元  $\nu(D)$  は nef cone  $\text{Nef}(X)$  から  $\{0, 1, \dots, \dim X\}$  への凸関数である.  $\mathbb{R}$  因子  $D$  が擬正であることは任意の ample  $\mathbb{R}$  因子  $A$  に対して  $D + A$  が big であることと同値である. 擬正  $\mathbb{R}$  因子  $D$  と  $X$  上の一点  $x$  に対して以下の様に実数  $\sigma_x(D)$  を定義する.

- $D$  が big のとき,

$$\sigma_x(D) := \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{mult}_x \text{Bs } \lfloor tD \rfloor.$$

- $D$  が単に擬正のとき, ample 因子  $A$  をひとつ選んで

$$\sigma_x(D) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sigma_x(D + \varepsilon A).$$

この定義が  $A$  の取り方にも依らず, また  $D$  が big のときにも共に一致していることがわかる. また  $\sigma_x(D)$  は  $D$  の第一 Chern 類のみに依存する量である.

**定理 1.** 非特異射影的代数多様体  $X$  には以下の性質を持つ ample 因子  $A$  が存在する: 任意の擬正  $\mathbb{R}$  因子  $D$  と  $\sigma_x(D) = 0$  かつ  $x \notin \text{Supp}\langle D \rangle$  なる点  $x$  と任意の正の実数  $m$  に対して

$$x \notin \text{Bs } \lceil mD \rceil + A \cup \text{Bs } \lfloor mD \rfloor + A.$$

ただし  $\lceil D \rceil := -\lfloor -D \rfloor$  は  $D$  の切り上げ,  $\langle D \rangle := D - \lfloor D \rfloor$  は分数部分である.

略証.  $\rho_y: Z \rightarrow X$  を点  $y$  でのブローアップ,  $E_y$  を例外因子とし実数  $0 < \alpha < 1$  をひとつ固定する. このとき

$$\rho_y^*((1 - \alpha)A - K_X - \langle mD \rangle) - (\dim X)E_y$$

が全ての点  $y$ , 全ての正の実数  $m$  について ample となる ample 因子  $A$  が存在する. 条件  $\sigma_x(D) = 0$  より任意の正の実数  $m$  に対して

$$\text{mult}_x \Delta < 1$$

を満たす,  $mD + \alpha A$  と数値的同値な正  $\mathbb{R}$  因子  $\Delta$  が存在する. ここで  $(X, \Delta)$  および  $(X, \Delta + \langle -mD \rangle)$  は  $x$  において log-terminal である.  $L_1 := \lceil mD \rceil + A$ ,  $L_2 := \lfloor mD \rfloor + A$  とおくと

$$\rho_x^*(L_1 - (K_X + \Delta + \langle -mD \rangle)) - (\dim X)E_x \sim_{\text{num}} \rho_x^*((1 - \alpha)A - K_X) - (\dim X)E_x$$

$$\rho_x^*(L_2 - (K_X + \Delta)) - (\dim X)E_x \sim_{\text{num}} \rho_x^*((1 - \alpha)A - K_X - \langle mD \rangle) - (\dim X)E_x$$

が成り立つ. ただし  $\sim_{\text{num}}$  は数値的同値を表わす. したがって次の命題に帰着された.  $\square$

**命題 2.** 非特異射影的代数多様体  $X$  と正  $\mathbb{R}$  因子  $\Delta$  の対  $(X, \Delta)$  が点  $x$  で log-terminal であると仮定する. また  $\rho_x: Z \rightarrow X$  と  $E_x$  を前述のとおりとする. もし Cartier 因子  $L$  について  $\rho_x^*(L - (K_X + \Delta)) - (\dim X)E_x$  が ample ならば  $x \notin \text{Bs}|L|$  である.

この命題は川又-Viehweg 消滅定理によって証明される. 以後  $\sigma_x(D) = 0$  のとき,  $D$  は  $x$  で nef である, と言う. これは  $x$  を通る任意の曲線と  $D$  との交点数が非負というより強い条件である.  $D$  が  $x$  で nef であることは任意の ample  $\mathbb{R}$  因子  $A$  に対して  $D + A$  が  $x$  で ample であることに他ならない.

**系 3.** (1)  $\mathbb{R}$  因子  $D$  が擬正であることとある ample 因子  $A$  に対して  $H^0(X, \lfloor mD \rfloor + A) \neq 0$  が任意の自然数  $m$  について成り立つことは同値.  
 (2) 擬正  $\mathbb{R}$  因子  $D$  に対して  $\Sigma(D)$  を  $\sigma_x(D) > 0$  なる点  $x$  の全体とする. すると  $\Sigma(D)$  は代数的閉集合の加算和であり, もし  $x \in \Sigma(D)$  ならば  $x$  を通る既約曲線  $C$  で  $C \subset \Sigma(D)$  なるものが存在する.

任意の真の代数的既約閉集合  $W$  に対して

$$\sigma_W(D) := \inf_{x \in W} \sigma_x(D)$$

と定義する.  $\Sigma(D)$  の既約成分は  $\sigma_W(D) > 0$  となる  $W$  からなる. そのうち余次元 1 のもの  $\{W_i\}$  は有限個しかなく因子として互いに数値的に一次独立である. そこで正  $\mathbb{R}$  因子

$$N(D) := \sum_{W_i} \sigma_{W_i}(D) W_i$$

を考える.  $P(D) := D - N(D)$  において  $D = P(D) + N(D)$  を  $D$  の  $\sigma$  分解と呼ぶ. 任意の点  $x$  に対して  $\sigma_x(D) = \sigma_x(P(D)) + \text{mult}_x N(D)$  が成り立つ. もし  $P(D)$  が nef ならばこの  $\sigma$  分解を Zariski 分解と呼ぶが<sup>1</sup>, 任意の双有理射  $f: Y \rightarrow X$  で引き戻しても  $P(f^*(D))$  が nef にならない例がある [N, 5.2]. 次の命題は命題 2 と同様の議論で証明できる.

**命題 4.** 非特異射影的代数多様体  $X$  と正  $\mathbb{R}$  因子  $\Delta$  の対  $(X, \Delta)$  は非特異既約曲線  $C$  に沿って log-terminal であり  $C \not\subset \text{Supp } \Delta$  と仮定する.  $\rho_C: Z \rightarrow X$  を  $C$  を中心としたブローアップ,  $E_C$  を例外因子とおく. もし Cartier 因子  $L$  について  $\rho_C^*(L - (K_X + \Delta)) - (\dim X - 1)E_C$  が ample ならば, 準同型

$$H^0(X, L) \rightarrow H^0(C, L|_C)$$

は全射である.

そして定理 1 と同様の証明によって以下の結果を得る.

**定理 5.** 擬正  $\mathbb{R}$  因子  $D$  が数値的にゼロでなく,  $N(D) = 0$  とする. このときある ample 因子  $A$  に対して  $\dim H^0(X, \lfloor mD \rfloor + A)$  は少なくとも  $m$  の order をもつ.

ゆえに擬正  $\mathbb{R}$  因子  $D$  に対して以下の 3 条件は同値である.

- (1)  $D$  と  $N(D)$  は数値的同値.
- (2) 任意の ample 因子について  $\dim H^0(X, \lfloor mD \rfloor + A)$  は  $m$  について有界.
- (3) 任意の ample 因子について  $\lim_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \dim H^0(X, \lfloor mD \rfloor + A) = 0$ .

非特異射影的代数多様体  $X$  とその上の  $\mathbb{R}$  因子  $D$  および ample 因子  $A$  に対して  $\sigma(D; A)$  を  $\liminf_{m \rightarrow \infty} m^{-k} \dim H^0(X, \lfloor mD \rfloor + A) > 0$  なる最大の非負整数  $k$ , ただし  $H^0(X, \lfloor mD \rfloor + A)$  がすべての  $m > 0$  についてゼロの場合には  $-\infty$  と定義する. また数値的  $D$  次元  $\kappa_{\text{num}}(D) = \kappa_{\text{num}}(D, X)$  を  $\sup\{\sigma(D; A) \mid A \text{ ample}\}$  と定義する<sup>1</sup>. 系 3 より  $\kappa_{\text{num}}(D) \geq 0$  と  $D$  が擬正因子であることは同値である. また定理 5 より  $\kappa_{\text{num}}(D) = 0$  と,  $D$  と  $N(D)$  が数値的同値であることは同値である. その他  $\kappa_{\text{num}}$  は以下の性質を持つ.

<sup>1</sup>[N] では  $\kappa_\sigma$  としている. もう一つ  $\kappa_\nu$  という別の定義がある.

- (1)  $D - D'$  が擬正ならば  $\kappa_{\text{num}}(D) \geq \kappa_{\text{num}}(D')$ . 特に  $\kappa_{\text{num}}(D)$  は  $D$  の第一 Chern 類のみに依存する.
- (2)  $\kappa(D) \leq \kappa_{\text{num}}(D)$ .
- (3)  $D$  が nef ならば  $\kappa_{\text{num}}(D) = \nu(D)$ .
- (4)  $\kappa_{\text{num}}(D) = \dim X$  と  $D$  が big であることは同値.
- (5) (Covering Lemma) 非特異射影的代数多様体からの全射  $f: Y \rightarrow X$  と  $f$ -例外因子  $E$  に対して  $\kappa_{\text{num}}(f^*D + E) = \kappa_{\text{num}}(D)$ .
- (6) (Easy addition) 代数的ファイバー空間  $\pi: X \rightarrow S$  について

$$\kappa_{\text{num}}(D, X) \leq \kappa_{\text{num}}(D_s, X_s) + \dim S.$$

ただし  $s \in S$  は非常に一般の点で  $X_s = \pi^{-1}(s)$ ,  $D_s$  は  $D$  の  $X_s$  への制限を表わす.

また非特異射影的代数多様体  $X$  に対する  $\kappa_{\text{num}}(X) := \kappa_{\text{num}}(K_X)$  は双有理不変量である. この  $\kappa_{\text{num}}(X)$  を  $X$  の数値的小平次元と呼ぶ. もし  $X$  が極小モデル  $V$  を持つならば  $\kappa_{\text{num}}(X) = \nu(V)$  である.

### 3. WEAKLY POSITIVITY と $\omega$ -SHEAF

因子が点  $x$  で nef という概念は Viehweg によって導入された次の weakly positive という概念と本質的に同じである.

**定義 6.** 非特異射影的代数多様体  $X$  上の連接層  $\mathcal{F}$  が以下の条件を満たすとき点  $x$  で weakly positive であると言う: ひとつの ample 因子  $A$  と任意の自然数  $a$  に対して, 自然数  $b$  を適当に選べば層  $\hat{S}^{ab}(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}(bA)$  の大域切断が  $x$  での stalk を生成する. ただし  $\hat{S}^b(\mathcal{F})$  は  $\mathcal{F}$  の  $b$  次の対称 tensor 積の double dual を表わす.

実際  $\mathcal{F}$  が点  $x$  で weakly positive であることを対応する tautological 因子の条件で述べるができる. 簡単のため今  $\mathcal{F}$  が locally free と仮定して  $p: \mathbb{P}(\mathcal{F}) \rightarrow X$  を projective bundle,  $H$  を tautological 因子とする. このとき以下の 2 条件は同値である.

- (1)  $\mathcal{F}$  は点  $x$  で weakly positive.
- (2)  $H$  は pseudo-effective でありかつ  $\Sigma(H) \cap p^{-1}(x) = \emptyset$ .

この同値性は  $\mathcal{F}$  が locally free でないときにも少し複雑な形ではあるが表わすことができる. また命題 2, 4 の論法により次が成り立つ.

**命題 7.** 接続層  $\mathcal{F}$  が  $x$  で weakly positive かつ locally free ならば以下の性質を満たす ample 因子  $A$  が存在する: 任意の  $m$  に対して  $\hat{\mathcal{S}}^m(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}(A)$  の大域切断が  $x$  での stalk を生成する.

ここで注意したいことは証明上この  $A$  は  $\mathcal{F}$  の階数に依存することである. ところが, たとえば dualizing sheaf の順像  $\mathcal{F} = f_*\omega_Y$  について考えると, もし  $f: Y \rightarrow X$  が非特異射影的代数多様体  $Y$  からの全射であれば,  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(A)$  が大域切断で生成されるという性質を持つ ample 因子  $A$  は  $X$  のみに依存してとることができる. それは Kollár [Ko] の結果からわかる. それを言い換える意味で次の  $\omega$ -sheaf を定義する.

**定義 8.** ある非特異射影的代数多様体  $Y$  からの全射  $f: Y \rightarrow X$  によって得られる順像  $f_*\omega_Y$  の直和因子となる接続層を  $\omega$ -sheaf と呼ぶ.

Kollár [Ko] の結果より次の命題が証明できる.

**命題 9.**  $g: X \rightarrow Z$  を射影的代数多様体の間の全射とし,  $\mathcal{F}$  を  $X$  上の  $\omega$ -sheaf とする. このとき次が成り立つ.

- (1)  $R^ig_*\mathcal{F}$  は  $\omega$ -sheaf.
- (2) 導来圏  $D(\mathcal{O}_Z)$  において  $Rg_*\mathcal{F} \sim_{\text{qis}} \bigoplus R^ig_*\mathcal{F}[-i]$ .
- (3)  $X$  上の ample 因子  $A$  と  $p > 0$  に対して  $H^p(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(A)) = 0$ .

ただし  $\sim_{\text{qis}}$  は quasi-isomorphism を表す.

**注意 10** ([N, A.4]). 正規な多様体  $X$  上のある  $\omega$ -sheaf が点  $x$  で locally free なとき,  $x$  の analytic な近傍  $\mathcal{U}$  上ある正  $\mathbb{Q}$  因子  $\Delta$  が存在して  $(\mathcal{U}, \Delta)$  は log-terminal となる. 特に  $(X, x)$  は有理特異点または非特異である.

**定義 11.** 正規射影的代数多様体  $X$  上の接続層  $\mathcal{F}$  の double dual  $\mathcal{F}^\wedge$  が同じ階数の  $\omega$ -sheaf を部分層に持つとき,  $\mathcal{F}$  を  $\hat{\omega}$ -sheaf と呼ぶ.

非特異射影的代数多様体の間の全射  $f: Y \rightarrow X$  に対して順像  $f_*\omega_{Y/X}$  はある条件のもとでは numerically semi-positive な locally free sheaf であることが川又 [Kal] で示され, その条件がなくても, ある Zariski 開集合上 weakly positive であることが Viehweg [V] で示されている. したがって非特異射影的代数多様体  $X$  上の  $\hat{\omega}$ -sheaf  $\mathcal{F}$  について  $\mathcal{F} \otimes \omega_X^{-1}$  は, ある Zariski 開集合上で weakly positive である. Viehweg [V] はさらに任意の自然数  $m$  について層  $f_*(\omega_{Y/X}^{\otimes m})$  が, ある Zariski 開集合上で weakly positive であることを cyclic covering を利用して証明した. 同じテクニックで以下の命題 12 と定理 13 を証明できる.

**命題 12.** 非特異射影的代数多様体  $X$  上の  $\mathbb{R}$  因子  $D$  が nef かつ abundant でありその分数部分  $\langle D \rangle$  の support が正規交差因子のとき,  $\omega_X(\lceil D \rceil) = \mathcal{O}_X(K_X + \lceil D \rceil)$  は  $\omega$ -sheaf である.

**定理 13.** 非特異射影的代数多様体の間の全射  $f: Y \rightarrow X$  と  $Y$  の nef かつ abundant な  $\mathbb{R}$  因子  $D$  でその support が正規交差であるものを考える. このとき任意の自然数  $k$  に対して

$$\mathcal{F}_k := \omega_X \otimes f_*(\omega_{Y/X}^{\otimes k}(\lceil D \rceil))$$

は  $\omega$ -sheaf である. 特に  $k$  に依存しない ample 因子  $A$  で層  $\mathcal{O}(A) \otimes \mathcal{F}_k^\wedge$  の大域切断が一般の点での stalk を生成するものがある.

これより  $\kappa_{\text{num}}(X)$  の addition が導かれる.

**定理 14.** 非特異射影的代数多様体の間のファイバー空間  $f: Y \rightarrow X$  の非常に一般のファイバーを  $F$  とする. 任意の  $X$  上の因子  $L$  に対し

$$\kappa_{\text{num}}(K_{Y/X} + f^*L) \geq \kappa_{\text{num}}(K_F) + \kappa_{\text{num}}(L)$$

が成り立つ. とくに  $\kappa_{\text{num}}(Y) \geq \kappa_{\text{num}}(F) + \kappa_{\text{num}}(X)$ .

略証.  $D$  を  $Y$  の十分に ample な因子,  $H$  を  $X$  の十分 ample な因子とする. 適当な flattening の議論と定理 13 により generic injection

$$\mathcal{O}_X^{\oplus r_k} \rightarrow \mathcal{O}_X(H) \otimes f_*\omega_{Y/X}^{\otimes k}(D)$$

が存在すると仮定できる. ただし  $r_k$  は  $f_*\omega_{Y/X}^{\otimes k}(D)$  の階数. これに  $\mathcal{O}_X(kL + H)$  を tensor することによって不等式

$$\dim H^0(Y, k(K_{Y/X} + f^*L) + D + 2f^*H) \geq r_k \dim H^0(X, kL + H)$$

を得る.  $\kappa_{\text{num}}$  の定義から定理の不等式が導かれる. □

ゆえに飯高予想は一般化された abundance 予想  $\kappa_{\text{num}}(Y) = \kappa(Y)$  から導かれる. 飯高予想の精密化である Viehweg 予想については一般ファイバー  $F$  が極小モデルを持ち  $K_F$  が abundant という条件のもとで成立することが川又 [Ka3] で示されている. ここで  $F$  が極小モデルを持つという条件をはずせるのかはまだわからない.



## 4. ABUNDANCE

数値的小平次元  $\kappa_{\text{num}}(X)$  の addition の応用として次の abundance 予想の部分的解答を得る. これは  $X$  が極小モデルのときには別の議論で川又 [Ka3] によって得られている.

**定理 15.**  $\kappa_{\text{num}}(X) = 0$  ならば  $\kappa(X) = 0$ .

略証.  $\kappa(X) \geq 0$  を言えばいい. 不正則数  $q(X) = 0$  のときは,  $P(K_X) \sim_{\mathbb{Q}} 0$  なので  $\kappa(X) \geq 0$ .  $q(X) > 0$  のとき, Albanese 写像  $\alpha: X \rightarrow \text{Alb } X$  を考え  $X \rightarrow W \rightarrow \text{Alb } X$  を Stein 分解とする. ここで addition

$$0 = \kappa_{\text{num}}(X) \geq \kappa_{\text{num}}(X_w) + \kappa_{\text{num}}(W) \geq 0$$

より  $\kappa_{\text{num}}(W) = \kappa(W) = 0$ . よって  $W = \text{Alb } X$ . さて  $\alpha$  は Albanese 写像なので, 以下の 2 条件を満たす自然数  $m$  と数値的に自明な  $\text{Alb } X$  上の Cartier 因子  $L$  がある:

- (1)  $mN(K_X)$  は Cartier 因子.
- (2)  $mN(K_X) - mK_X \sim \alpha^*(mL)$ .

特に  $\kappa(X_w) = 0$  である.  $X$  を適当なブローアップで取り替えれば以下の二つの性質を満たすことができる.

- (1)  $\alpha$  はある非特異射影的代数多様体  $Y$  からの双有理射  $Y \rightarrow \text{Alb } X$  を経由する.
- (2) ここで誘導された射  $f: X \rightarrow Y$  は  $Y$  のある正規交差因子の外側で smooth.

ところで  $\kappa(Y) = 0$  なので, すべての自然数  $m$  について

$$(f_*\omega_{X/Y}^{\otimes mk})^\wedge \simeq \mathcal{O}_Y(mD)$$

となる自然数  $k$  と  $Y$  の因子  $D$  がある. ここで flattening の議論を使うことにより  $\kappa_{\text{num}}(X) = 0$  から  $\kappa_{\text{num}}(D) = 0$  が導かれる. 森 [M, 5.13] により  $Y$  をブローアップで取り替えれば support が正規交差な正  $\mathbb{Q}$  因子  $N$  で,  $P := (1/k)D - N$  が nef かつ  $\lfloor N \rfloor = 0$  なるものがある. すると  $P$  は数値的に自明. 森 [M, 5.13] より非特異射影的代数多様体  $Y'$  からの有限 Galois covering  $Y' \rightarrow Y$  と非特異射影的代数多様体  $X'$  からの全射  $f': X' \rightarrow Y'$  で  $f'$  が  $Y'$  のある正規交差因子の外側で smooth でありかつ  $P$  の  $Y'$  への引き戻しが  $f'_*\omega_{X'/Y'}$  と線型同値になるものがある. とくにこの invertible sheaf  $f'_*\omega_{X'/Y'}$  は数値的に自明. Hodge metric の議論および Deligne [D, 4.2.8(iii)(b)] によりこの層のあるべきは自明になる. ゆえに  $P \sim_{\mathbb{Q}} 0$  であり無限個の自然数  $m$  について  $H^0(Y, (f_*\omega_{X/Y}^{\otimes m})^\wedge) \neq 0$ . 再び flattening の議論により  $\kappa(X) \geq 0$  を得る.  $\square$

次の系が成り立つ.

系 16.  $\kappa(X) \geq 0$  のとき, 以下の 2 条件は同値.

- (1)  $\kappa(X) = \kappa_{\text{num}}(X)$ .
- (2) 飯高ファイバー空間  $X \cdots \rightarrow S$  の一般ファイバー  $F$  について  $\kappa_{\text{num}}(F) = 0$ .

3 次元以下の代数多様体については極小モデル理論がうまく機能し, abundance 予想も成り立つ [Ka4] ので, 4 次元以上の代数多様体  $X$  についても  $\kappa(X) \geq \dim X - 3$  ならば  $\kappa_{\text{num}}(X) = \kappa(X)$  である.

#### REFERENCES

- [D] P. Deligne, Théorie de Hodge, II, Publ. Math. IHES. **40** (1972), 5–57.
- [Ka1] Y. Kawamata, Characterization of abelian varieties, Compo. Math. **43** (1981), 253–276.
- [Ka2] ———, Pluricanonical systems on minimal algebraic varieties, Invent. Math., **79** (1985), 567–588
- [Ka3] ———, Minimal models and the Kodaira dimension of algebraic fiber spaces, J. Reine Angew. Math. **363** (1985), 1–46.
- [Ka4] ———, Abundance theorem for minimal threefolds, Invent. Math. **108** (1992), 229–246.
- [Ko] J. Kollár, Higher direct images of dualizing sheaves I, II, Ann. of Math., **123** (1986), 11–42, ibid. **124** (1986), 171–202.
- [M] S. Mori, Classification of higher dimensional varieties, in *Algebraic Geometry Bowdoin 1985*, Proc. Symp. Pure Math. **46** (1987), 269–331.
- [N] N. Nakayama, Zariski-decomposition and abundance, preprint 1997, RIMS-1142.
- [V] E. Viehweg, Weak positivity and the additivity of the Kodaira dimension for certain fiber spaces, in *Algebraic Varieties and Analytic Varieties*, Advanced Studies in Pure Math. **1**, Kinokuniya and North-Holland, 1983, pp. 329–353.